Quadratische Gleichungen

1. Reinquadratische Gleichungen

Beispiel:

$$x^2 = 171 \,\big|\, \sqrt{}$$
$$|x| = \sqrt{171}$$
$$x_1 = -\sqrt{171} \qquad x_2 = \sqrt{171}$$
$$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{171}; \sqrt{171}\right\}$$

Gleichungen der Form $ax^2 + b = 0$ mit $a,b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ nennt man auch reinquadratische Gleichungen.

Aufgaben:

1 $2x^2 - 27 = 0$

2 $(x+4)(x-4) = 345$

3 $(5x-3)^2 - 225 = 488 + (5-3x)^2$

4 $8 + x = \dfrac{1380}{x-8} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{8\}$

5 $(x+2)(x-3) - (2x-1)^2 = (x+1)(x+2)$

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $2x^2-27=0 \quad \Rightarrow x^2=13{,}5 \quad \Rightarrow x_1=-\sqrt{13{,}5} \quad x_2=\sqrt{13{,}5}$

$\mathbb{L}=\left\{-\sqrt{13{,}5};\sqrt{13{,}5}\right\}$

2 $(x+4)(x-4)=345$

$x^2-16=345 \quad \Rightarrow x^2=361 \quad \Rightarrow x_1=-19 \quad x_2=19$

$\mathbb{L}=\left\{-19;19\right\}$

3 $(5x-3)^2-225=488+(5-3x)^2$

$25x^2-30x+9-225=488+25-30x+9x^2$

$25x^2-216=9x^2+513 \quad \Rightarrow 16x^2=729 \quad \Rightarrow x^2=\frac{729}{16} \quad \Rightarrow x_1=-\frac{27}{4} \quad x_2=\frac{27}{4}$

$\mathbb{L}=\left\{-\frac{27}{4};\frac{27}{4}\right\}$

4 $8+x=\frac{1380}{x-8} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\left\{8\right\}$

$(8+x)(x-8)=1380 \quad \Rightarrow x^2-64=1380 \quad \Rightarrow x^2=1444 \quad \Rightarrow x_1=-38 \quad x_2=38$

$\mathbb{L}=\left\{-38;38\right\}$

5 $(x+2)(x-3)-(2x-1)^2=(x+1)(x+2)$

$x^2-x-6-(4x^2-4x+1)=x^2+3x+2$

$-3x^2+3x-7=x^2+3x+2 \quad \Rightarrow -4x^2=9 \quad \Rightarrow x^2=-\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\varnothing$

2. Gemischtquadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$ $a\neq 0$ nennt man auch gemischtquadratische Gleichung.

Eine quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$ $a\neq 0$ kann mit Hilfe folgender Formel gelöst werden:

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Den Term (b^2-4ac) nennt man Diskriminante.

Beispiel:

$$x^2+8x+7=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1}=\frac{-8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-8\pm 6}{2}$$

$$x_1=\frac{-8+6}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$x_2=\frac{-8-6}{2}=\frac{-14}{2}=-7$$

$$\mathbb{L}=\left\{-1;7\right\}$$

Jochen Weber

Aufgaben:

1 $x^2+2x-15=0$

2 $2x^2-3x-9=0$

3 $3x^2=5x+2 \quad \Rightarrow 3x^2-5x-2=0$

4 $x^2+2x=1 \quad \Rightarrow x^2+2x-1=0$

5 $4x^2-4x+1=0$

6 $3+2x+x^2=0$

7 $2+9x+4x^2=0$

8 $4x^2+5=8x$

9 $x^2+6x=-9$

Für die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung
$ax^2+bx+c=0$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$ $a\neq 0$ gilt:

D > 0: zwei Lösungen $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

D = 0: eine Lösung $x=-\dfrac{b}{2a}$

D < 0: keine Lösung

D ist die Diskriminante (b^2-4ac)

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $x^2+2x-15=0$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-15)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm8}{2}$$

$$x_1=\frac{-2+8}{2}=3 \qquad x_2=\frac{-2-8}{2}=-5 \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\{-5;3\}$$

2 $2x^2-3x-9=0$

$$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-9)}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{3\pm9}{4}$$

$$x_1=\frac{3+9}{4}=3 \qquad x_2=\frac{3-9}{4}=-\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\left\{-\frac{3}{2};3\right\}$$

3 $3x^2=5x+2 \quad \Rightarrow 3x^2-5x-2=0$

$$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{5\pm7}{6}$$

$$x_1=\frac{5+7}{6}=2 \qquad x_2=\frac{5-7}{6}=-\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\left\{-\frac{1}{3};2\right\}$$

4 $x^2+2x=1 \quad \Rightarrow x^2+2x-1=0$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1=-1+\sqrt{2} \qquad x_2=-1-\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\left\{-1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right\}$$

5 $4x^2-4x+1=0$

$$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{8}=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

6 $3+2x+x^2=0$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\varnothing$$

7 $2+9x+4x^2=0$

$$x_{1/2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}=\frac{-9\pm\sqrt{81-32}}{8}=\frac{-9\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{-9\pm7}{8}$$

$$x_1=\frac{-9+7}{8}=-\frac{1}{4} \qquad x_2=\frac{-9-7}{8}=-2 \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\left\{-2;-\frac{1}{4}\right\}$$

8 $4x^2+5=8x \quad \Rightarrow 4x^2-8x+5=0$

$$x_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot4\cdot5}}{2\cdot4}=\frac{8\pm\sqrt{64-80}}{8}=\frac{8\pm\sqrt{-16}}{8} \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\varnothing$$

9 $x^2+6x=-9 \quad \Rightarrow x^2+6x+9=0$

$$x_{1/2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{0}}{2}=-3 \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\{-3\}$$

Lösungsverfahren für spezielle quadratische Gleichungen

(1) Ausklammern

Beispiele:

1 $x^2+4x=0 \quad \Rightarrow x(x+4)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-4 \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\{-4;0\}$

2 $x^2=x \quad \Rightarrow x^2-x=0 \quad \Rightarrow x(x-1)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=1 \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\{0;1\}$

3 $4x^2-6x=3x \quad \Rightarrow 4x^2-9x=0 \quad \Rightarrow x(4x-9)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\left\{0;\frac{9}{4}\right\}$

(2) Zerlegung in Faktoren

Beispiele:

1 $x^2-x-6=0 \quad \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \quad \Rightarrow x_1=3 \quad x_2=-2 \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\{-2;3\}$

2 $x^2+2x-15=0 \quad \Rightarrow (x+5)(x-3)=0 \quad \Rightarrow x_1=-5 \quad x_2=3 \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\{-5;3\}$

> Wenn die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$ $a\neq 0$ die Lösungsmenge $\{x_1,x_2\}$ besitzt, so gilt:
>
> $x_1+x_2=-b$
>
> $x_1\cdot x_2=c$ (Satz von Vieta)

3 $x^2-14x+45=0 \quad \Rightarrow (x-5)(x-9)=0 \quad \Rightarrow x_1=5 \quad x_2=9 \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\{5;9\}$

4 $x^2-11x+30=0 \quad \Rightarrow (x-5)(x-6)=0 \quad \Rightarrow x_1=5 \quad x_2=6 \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\{5;6\}$

5 $x^2+x-20=0 \quad \Rightarrow (x-4)(x+5)=0 \quad \Rightarrow x_1=4 \quad x_2=-5 \quad \Rightarrow \mathbb{L}=\{-5;4\}$

(3) Substitution

Beispiele:

1 $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$ "Biquadratische Gleichung"

Substitution: $z = x^2$

$\Rightarrow 9z^2 - 37z + 4 = 0$

$$z_{1/2} = \frac{37 \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{18} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{18} = \frac{37 \pm 35}{18}$$

$$z_1 = \frac{37+35}{18} = 4 \qquad z_2 = \frac{37-35}{18} = \frac{1}{9}$$

Resubstitution:

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

$x^2 = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3} \quad x_4 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-2; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 2\right\}$

2 $x^4 + 144 = 25x^2 \quad \Rightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

Substitution: $z = x^2$

$\Rightarrow z^2 - 25z + 144 = 0$

$$z_{1/2} = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2}$$

$$z_1 = \frac{25+7}{2} = 16 \qquad z_2 = \frac{25-7}{2} = 9$$

Resubstitution:

$x^2 = 16 \quad \Rightarrow x_1 = -4 \quad x_2 = 4$

$x^2 = 9 \quad \Rightarrow x_3 = -3 \quad x_4 = 3$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-4; -3; 3; 4\}$